Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις – Φυλλάδιο Ασκήσεων 1

Άσκηση 1. *Βρείτε τη λύση της εξισώσης μεταφοράς κάτω από τη συνθήκη* $u(x,0) = f(x)$*. Κάντε το ίδιο για την ανομοιογενή εξίσωση*

$$u_t + b \cdot \nabla u = g,$$

όπου $g(x,t) : \mathbb{R}^n \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$*.*

Άσκηση 2. *Δείξτε ότι η συναρτήσεις* $\log(x^2+y^2)$*,* $(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ *ικανοποιούν την εξίσωση Laplace μακριά από το 0 για* $n = 2$*,* $n = 3$ *αντίστοιχα.*

Άσκηση 3. *Έστω σημειακή μάζα* M *στο κέντρο των αξόνων. Το βαρυτικό πεδίο που επάγει δίνεται από τον τύπο*

$$\mathbf{g} = -\frac{MG}{|x|^2}\frac{x}{|x|} \qquad \text{(νόμος του Νεύτωνα)}$$

Για $n = 3$*, δείξτε ότι το curl του* $\mathbf{g}$ *είναι 0 και υπολογίστε το βαρυτικό δυναμικό* ϕ*. Ποια είναι η* f *στην αντίστοιχη εξίσωση Poisson;*

Άσκηση 4. *Έστω* $u(x,t)$ *λύση της εξίσωσης θερμότητας και* $v(x,t)$ *λύση της εξίσωσης κύματος. Δείξτε ότι οι* $u(\frac{x}{\lambda}, \frac{t}{\lambda^2})$*,* $v(\frac{x}{\lambda}, \frac{t}{\lambda})$ *είναι λύσεις των αντίστοιχων εξισώσεων για* $\lambda \neq 0$*.*

Άσκηση 5. *Δείξτε ότι η συνάρτηση* $t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ *ικανοποιεί την εξίσωση θερμότητας στο* $\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$*.*

Άσκηση 6. *Γράψτε την κυματοεξίσωση σαν σύστημα πρώτης τάξης.*

Άσκηση 7. *Γράψτε την κυματοεξίσωση σαν εξίσωση μεταφοράς για συνδυασμό μερικών παραγώγων της* u *στη διάσταση* $n = 1$*. Μπορείτε να τη λύσετε χρησιμοποιώντας την Άσκηση 1; Τι πληροφορία χρειάζεστε για να προσδιορίσετε ακριβώς τη λύση;*